LA SIMULAZIONE MONTE CARLO NEGLI STUDI ED ANALISI ECONOMICO-AMBIENTALI

(Luigi Fanizzi – ECOACQUE®)

Premessa

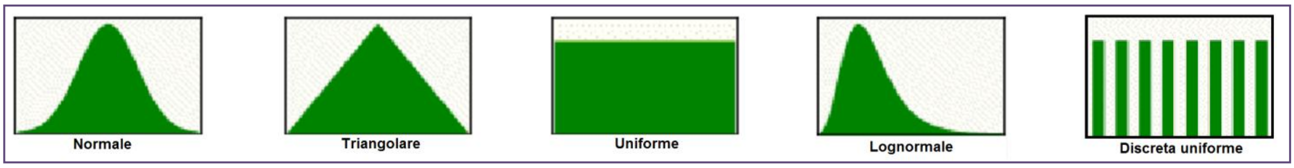
La simulazione numerica **Monte Carlo** è un potente metodo probabilistico (da cui il nome del famoso Casinò di giochi) che può essere molto utile in tutti quei problemi di difficile risoluzione analitica. L'idea di utilizzare, in modo sistematico, simulazioni di tipo probabilistico, per risolvere un problema di natura fisica, è stata attribuita, formalmente, al matematico polacco **Stanislaw Ulam**, che fu uno dei personaggi chiave nel progetto americano Manhattan (Los Alamos, New Mexico), per la costruzione della bomba atomica, durante la seconda guerra mondiale (tra il 1943 ed il 1945), anche se, a detta di Emilio Segré, il primo a scoprirlo fu il fisico italiano Enrico Fermi, nei suoi studi romani sul moto dei neutroni, negli anni '30. Nella gestione di un progetto, il **Metodo Monte Carlo**, può risultare molto utile nel valutare i rischi, così come i tempi ed i costi di diverse impostazioni ad esso associate (S. M. Ross, 2004).
Si tratta di una tecnica di analisi statistica che può essere applicata in tutte quelle situazioni in cui ci si trova in presenza di **stime di progetto** molto incerte, con l'obiettivo di ridurne il livello di incertezza attraverso una serie di simulazioni. In tal senso, può essere applicata nell'analisi dei tempi, dei costi, dei rischi associati ad un progetto e, quindi, nella valutazione di impatto ambientale (impatto min/max di determinati fattori antropici su una specifica componente naturale). Per ognuna di queste variabili, le simulazioni Monte Carlo non forniscono un'unica stima ma un **range** di possibili stime con, associato a ciascuna stima, il livello di probabilità che quella stima sia accurata (cd *livello di confidenza*).
Per esempio la tecnica può essere utilizzata per determinare il costo complessivo di un progetto attraverso una serie discreta di cicli di simulazione. Nella fase di pianificazione di un progetto vengono individuate le attività che compongono il progetto e viene stimato il costo associato a ciascuna attività. Una volta costruito il **Reticolo Logico del Progetto**, attraverso la tecnica del **Critical Path Method** o **CPM** (*tecnica di pianificazione, creata nel 1950, che permette di identificare il sottoinsieme delle attività di progetto che risultano critiche*), si può determinare il costo complessivo del progetto. Poiché, però, ci si basa su stime di costi, non si può essere sicuri che questo costo complessivo e, quindi, anche quelli di completamento, siano certi. Si può quindi svolgere un'Analisi Monte Carlo.
Svolgere una simulazione Monte Carlo richiede, sicuramente, delle conoscenze di base di analisi statistica (sul web è possibile reperire molte applicazioni commerciali e spreadsheet Microsoft Excel® di Windows®, già predisposti per casistiche specifiche). Alcuni prodotti software di project management evoluti contengono, al proprio interno, strumenti per sviluppare un'analisi Monte Carlo di un progetto (Crystal Ball Oracle Overview, ver. 11.1.2.3.500, GMSL srl; 2014).
Nel seguito viene descritta l'impostazione di base cui fanno riferimento molti fogli elettronici Excel, tra quelli disponibili in rete, in modo che ne risulti semplificato l'utilizzo.

Introduzione alla simulazione Monte Carlo

Il Metodo Monte Carlo è basato sulla generazione di una molteplicità di iterazioni per determinare il valore atteso di una determinata variabile casuale. Questo può essere ottenuto in MS Excel® di Windows®, propagando una formula di base, tante volte quante sono quelle richieste dal metodo.

UNITA'	MINIMO	MASSIMO
A	10000	20000
B	15000	15000
C	7500	12000
D	4800	6200
E	20000	25000
F	5000	7000
TOTALE	**62300**	**85200**

Ad esempio, si prenda in considerazione un progetto di un impianto di depurazione acque reflue urbane che abbia ***6*** (sei) stazioni di trattamento specifico (**A**-***defangazione,*** **B**-***omogeneizzazione-equalizzazione,*** **C**-***predenitrificazione,*** **D**-***nitrificazione,*** **E**-***sedimentazione*** *e* **F**-***disinfezione finale***).
In alcuni casi il costo di una stazione è certo ed è fisso (come, per esempio, il costo unico del trattamento **B**, espresso in euro, della tabella a fianco). Nella maggior parte dei casi, Invece, una stazione di trattamento ha un costo stimato che varia all'interno di uno specifico intervallo (min/max).
La distribuzione possibile del costo di ciascun trattamento, comunemente, può avere un andamento di tipo ***normale*** oppure ***uniforme***, ***triangolare***, ***lognormale*** ovvero ***discreta***.



In prima approssimazione, potrà essere assunto che ciascuna variabile casuale x segua, come andamento, una densità di probabilità *Normale* o *Gaussiana*, di media μ e varianza σ^2, senza compromettere il risultato, ossia (F. P. Borrazzo e P. Perchinunno, 2007):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Inoltre, nell'esempio, costituito dai 6 tipi di stazioni di trattamento specifico, riportate nella tabella, si assumerà, per semplicità, che il costo di ciascuna sia indipendente da quello delle altre.
Pertanto anche il costo totale dell'intero impianto costituisce una variabile il cui valore è compreso in un intervallo tra un minimo ed un massimo. Tale variabile sarà distribuita ***normalmente*** in quanto somma di ***variabili random***. Per questo motivo non è molto importante definire con precisione il tipo di distribuzione del costo di ciascuna stazione di trattamento. Lo schema generale della simulazione Monte Carlo è il seguente:

- vengono generati valori *random* per il costo di ciascuna delle 6 unità di trattamento;
- questi valori vengono sommati per ciascuna iterazione in modo da arrivare al costo totale del progetto per ciascuna delle iterazioni;
- il costo atteso del progetto sarà pari alla media dei costi totali prodotti dalle varie iterazioni.

Per ottenere questo è necessario calcolare alcuni parametri che consento di garantire l'affidabilità del risultato. Tali parametri verranno descritti più avanti.
Il primo passaggio è costituito dalla generazione di valori random relativi al costo di ciascuna stazione di trattamento specifico. Assumendo, come detto, una **distribuzione normale**, in MS Excel® può essere utilizzata la funzione **CASUALE()** per generare valori casuali compresi tra **0** ed **1**, che andranno moltiplicati per il **Range** (cd campo di variazione) di ciascuna variabile (**differenza tra valore massimo e valore minimo**).
Il valore random del costo dell'unità **A** è dato, pertanto, dalla seguente formula:

CASUALE() * (20000 – 10000) + 10000

La formula genera, quindi, valori casuali distribuiti normalmente e compresi tra **20000** e **10000.**
Se viene creata una formula come questa, per ciascuna delle **6** unità, il costo totale del progetto, per ciascuna delle iterazioni, sarà pari alla somma dei valori relativi alle **6** summenzionate unità.
Per ottenere il valore atteso del costo, pertanto, occorrerà propagare la formula per il numero di iterazioni necessarie, che verrà calcolato nel paragrafo successivo. La tabella sottoriportata mostra le iterazioni, riferite all'esempio che si sta seguendo (righe 5, 6, 7, 8, 9, 10, eccetera). La riga **5** costituisce il modello base che viene propagato. La colonna **H** presenta il **costo totale del progetto per ciascuna iterazione**.

Appunti | Carattere | Allineamento

B5 | =CASUALE()*(B$3-B$2)+B$2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	UNITA'	A	B	C	D	E	F	TOTALE
2	Minimi:	10000	15000	7500	4800	20000	5000	62300
3	Massimi:	20000	15000	12000	6200	25000	7000	85200
4	Iterazioni							
5	1	12555	15000	10119	5462	21414	5812	70362
6	2	11392	15000	8631	4980	20980	6538	67521
7	3	17110	15000	7551	5093	22915	6315	73984
8	4	16718	15000	10418	5072	24649	6603	78461
9	5	12556	15000	8896	4913	22989	6749	71103
10	6	12264	15000	8772	4862	24613	6064	71575
11	7	13334	15000	7992	5432	23477	6784	72018
12	8	14065	15000	11788	5844	21767	6871	75335
13	9	10142	15000	11627	4856	21631	5016	68273
14	10	11702	15000	8958	6120	24260	5938	71978
15	11	13605	15000	7927	5077	21963	6365	69937
16	12	11616	15000	9364	5752	22692	6631	71055
17	13	16975	15000	8723	5093	24698	5375	75864
18	14	14735	15000	7795	4924	22490	6663	71607
19	15	15739	15000	8269	5747	23757	5536	74048
20	16	13412	15000	9565	5429	24805	6920	75132
21	17	16071	15000	11287	4805	20764	6534	74461
22	18	17709	15000	11421	4929	24582	5289	78929
23	19	19772	15000	7788	5551	22825	5923	76859
24	20	15225	15000	8938	4928	20268	6160	70518
25	21	18764	15000	8796	5005	23336	6764	77665
26	22	14226	15000	10097	5170	22963	6600	74057
27	23	13447	15000	8524	5123	23185	6784	72063
28	24	19162	15000	7901	5791	21550	5479	74882
29	25	16605	15000	7835	5266	23310	5526	73542
30	MEDIE	14756	15000	9159	5249	22875	6210	73249
31							VAL. PROBABILE =	73285
32							ASIMMETRIA =	0,22
33							CURTOSI =	2,38
34							RANGE =	22900
35							MEDIA =	73750
36							σ =	9349
37							ε =	3688
38							N =	25

Calcolo del numero di iterazioni di una simulazione Monte Carlo

Il metodo Monte Carlo fornisce una stima del valore atteso di una variabile ed è in grado di prevedere anche l'errore associato alla stima che è proporzionale al numero di iterazioni (Teorema del limite centrale della legge dei grandi numeri o *teorema di Bernoulli*). Nella formula successiva è calcolato l'**errore massimo assoluto** (ε) in funzione della **deviazione standard** (σ) e del numero (**N**) di iterazioni (A. Rotondi et Al., 2012):

$$\varepsilon = \frac{Z \cdot \sigma}{\sqrt{N}}$$

ove:

Z = costante (valore fisso), che corrisponde alla variabile casuale normale standardizzata (cd ***deviata normale standardizzata***), che dipende dal livello di fiducia desiderato dalla stima (A. A. Arens et Al., 2006).

Livello di significatività [%]	Livello di fiducia [%]	Deviata normale STD Z [n.p.]
100	0	**0,00**
90	10	**0,13**
80	20	**0,25**
70	30	**0,39**
60	40	**0,52**
50	50	**0,67**
40	60	**0,84**
30	70	**1,04**
25	75	**1,15**
20	80	**1,28**
10	90	**1,64**
5	95	**1,96**
1	99	**2,58**

Pertanto occorre da un lato calcolare la deviazione standard ed ipotizzare una percentuale di errore ritenuta accettabile per ottenere il numero di iterazioni necessarie per rimanere dentro tale valore percentuale. Con riferimento alla tabella sopra riportata, la **deviazione standard** (σ), può essere calcolata utilizzando la funzione **DEV.ST.POP.VALORI** di MS Excel®:

σ = DEV.ST.POP.VALORI(H2:H3;MEDIA(H2:H3) = 9349

Appunti | Carattere | Allineamento | Numeri

H36 | =DEV.ST.POP.VALORI(H2:H3;MEDIA(H2:H3))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	UNITA'	A	B	C	D	E	F	TOTALE	
2	Minimi:	10000	15000	7500	4800	20000	5000	62300	
3	Massimi:	20000	15000	12000	6200	25000	7000	85200	
4	Iterazioni								
5	1	12555	15000	10119	5462	21414	5812	70362	
6	2	11392	15000	8631	4980	20980	6538	67521	
7	3	17110	15000	7551	5093	22915	6315	73984	
8	4	16718	15000	10418	5072	24649	6603	78461	
9	5	12556	15000	8896	4913	22989	6749	71103	
10	6	12264	15000	8772	4862	24613	6064	71575	
11	7	13334	15000	7992	5432	23477	6784	72018	
12	8	14065	15000	11788	5844	21767	6871	75335	
13	9	10142	15000	11627	4856	21631	5016	68273	
14	10	11702	15000	8958	6120	24260	5938	71978	
15	11	13605	15000	7927	5077	21963	6365	69937	
16	12	11616	15000	9364	5752	22692	6631	71055	
17	13	16975	15000	8723	5093	24698	5375	75864	
18	14	14735	15000	7795	4924	22490	6663	71607	
19	15	15739	15000	8269	5747	23757	5536	74048	
20	16	13412	15000	9565	5429	24805	6920	75132	
21	17	16071	15000	11287	4805	20764	6534	74461	
22	18	17709	15000	11421	4929	24582	5289	78929	
23	19	19772	15000	7788	5551	22825	5923	76859	
24	20	15225	15000	8938	4928	20268	6160	70518	
25	21	18764	15000	8796	5005	23336	6764	77665	
26	22	14226	15000	10097	5170	22963	6600	74057	
27	23	13447	15000	8524	5123	23185	6784	72063	
28	24	19162	15000	7901	5791	21550	5479	74882	
29	25	16605	15000	7835	5266	23310	5526	73542	
30	MEDIE	14756	15000	9159	5249	22875	6210	73249	
31							VAL. PROBABILE =	73285	
32							ASIMMETRIA =	0,22	
33							CURTOSI =	2,38	
34							RANGE =	22900	
35							MEDIA =	73750	
36							σ =	9349	
37							ε =	3688	
38							N =	25	

Se si assume un margine massimo di errore (ε), piccolo a piacere e pari al **5** %, il suo valore assoluto si ottiene dividendo per **20** (100/5) la **MEDIA** tra valore massimo (**H3**) e valore minimo (**H2**), del costo totale, attraverso la seguente formula:

ε = [MEDIA(H2:H3)]/20 = 73750/20 = 3688

Pertanto, in questa simulazione Monte Carlo, il numero di iterazioni necessarie **N** (numerosità campionaria) ad ottenere un risultato, con un **livello di fiducia**, non inferiore al **95** % (grado di affidabilità della procedura), è pari a **25**, come risulta dal seguente calcolo:

$$N = \left(\frac{1,96 \cdot 9349}{3688}\right)^2 = 25$$

Appunti | Carattere | Allineamento | Numeri

H35 f_x =MEDIA(H2:H3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	UNITA'	A	B	C	D	E	F	TOTALE	
2	Minimi:	10000	15000	7500	4800	20000	5000	62300	
3	Massimi:	20000	15000	12000	6200	25000	7000	85200	
4	Iterazioni								
5	1	12555	15000	10119	5462	21414	5812	70362	
6	2	11392	15000	8631	4980	20980	6538	67521	
7	3	17110	15000	7551	5093	22915	6315	73984	
8	4	16718	15000	10418	5072	24649	6603	78461	
9	5	12556	15000	8896	4913	22989	6749	71103	
10	6	12264	15000	8772	4862	24613	6064	71575	
11	7	13334	15000	7992	5432	23477	6784	72018	
12	8	14065	15000	11788	5844	21767	6871	75335	
13	9	10142	15000	11627	4856	21631	5016	68273	
14	10	11702	15000	8958	6120	24260	5938	71978	
15	11	13605	15000	7927	5077	21963	6365	69937	
16	12	11616	15000	9364	5752	22692	6631	71055	
17	13	16975	15000	8723	5093	24698	5375	75864	
18	14	14735	15000	7795	4924	22490	6663	71607	
19	15	15739	15000	8269	5747	23757	5536	74048	
20	16	13412	15000	9565	5429	24805	6920	75132	
21	17	16071	15000	11287	4805	20764	6534	74461	
22	18	17709	15000	11421	4929	24582	5289	78929	
23	19	19772	15000	7788	5551	22825	5923	76859	
24	20	15225	15000	8938	4928	20268	6160	70518	
25	21	18764	15000	8796	5005	23336	6764	77665	
26	22	14226	15000	10097	5170	22963	6600	74057	
27	23	13447	15000	8524	5123	23185	6784	72063	
28	24	19162	15000	7901	5791	21550	5479	74882	
29	25	16605	15000	7835	5266	23310	5526	73542	
30	MEDIE	14756	15000	9159	5249	22875	6210	73249	
31							VAL. PROBABILE =	73285	
32							ASIMMETRIA =	0,22	
33							CURTOSI =	2,38	
34							RANGE =	22900	
35							MEDIA =	73750	
36							σ =	9349	
37							ε =	3688	
38							N =	25	

Il calcolo di stima, che porta ad assegnare al costo totale, il **valore più probabile** di **73285** (diverso dal valor medio, di **73750**, fra massimo e minimo costo), mostra come il metodo AMC porti ad un risultato che evidenzia come sia meno probabile che si verifichino i valori vicini al minimo ed al massimo che quelli vicino al valore più probabile.

Appunti | Carattere | Allineamento | Numeri

H31 f_x =MEDIA(H2:H30)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	UNITA'	A	B	C	D	E	F	TOTALE	
2	Minimi:	10000	15000	7500	4800	20000	5000	62300	
3	Massimi:	20000	15000	12000	6200	25000	7000	85200	
4	Iterazioni								
5	1	12555	15000	10119	5462	21414	5812	70362	
6	2	11392	15000	8631	4980	20980	6538	67521	
7	3	17110	15000	7551	5093	22915	6315	73984	
8	4	16718	15000	10418	5072	24649	6603	78461	
9	5	12556	15000	8896	4913	22989	6749	71103	
10	6	12264	15000	8772	4862	24613	6064	71575	
11	7	13334	15000	7992	5432	23477	6784	72018	
12	8	14065	15000	11788	5844	21767	6871	75335	
13	9	10142	15000	11627	4856	21631	5016	68273	
14	10	11702	15000	8958	6120	24260	5938	71978	
15	11	13605	15000	7927	5077	21963	6365	69937	
16	12	11616	15000	9364	5752	22692	6631	71055	
17	13	16975	15000	8723	5093	24698	5375	75864	
18	14	14735	15000	7795	4924	22490	6663	71607	
19	15	15739	15000	8269	5747	23757	5536	74048	
20	16	13412	15000	9565	5429	24805	6920	75132	
21	17	16071	15000	11287	4805	20764	6534	74461	
22	18	17709	15000	11421	4929	24582	5289	78929	
23	19	19772	15000	7788	5551	22825	5923	76859	
24	20	15225	15000	8938	4928	20268	6160	70518	
25	21	18764	15000	8796	5005	23336	6764	77665	
26	22	14226	15000	10097	5170	22963	6600	74057	
27	23	13447	15000	8524	5123	23185	6784	72063	
28	24	19162	15000	7901	5791	21550	5479	74882	
29	25	16605	15000	7835	5266	23310	5526	73542	
30	MEDIE	14756	15000	9159	5249	22875	6210	73249	
31							VAL. PROBABILE =	73285	
32							ASIMMETRIA =	0,22	
33							CURTOSI =	2,38	
34							RANGE =	22900	
35							MEDIA =	73750	
36							σ =	9349	
37							ε =	3688	
38							N =	25	

Analizzando, infine, gli indici di forma della distribuzione (D. Morale, 2010), questi indicano che la stessa, rispetto a quella normale ipotizzata (**Asimmetria = 0** e **Curtosi = 3**), ha **coda spostata verso destra** (**Asimmetria > 0**) ed è leggermente **platicurtica** ossia più piatta (**Curtosi < 3**).

Appunti | Carattere | Allineamento | Numeri

H32 | fx =ASIMMETRIA(H2:H30)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	UNITA'	A	B	C	D	E	F	TOTALE
2	Minimi:	10000	15000	7500	4800	20000	5000	62300
3	Massimi:	20000	15000	12000	6200	25000	7000	85200
4	Iterazioni							
5	1	12555	15000	10119	5462	21414	5812	70362
6	2	11392	15000	8631	4980	20980	6538	67521
7	3	17110	15000	7551	5093	22915	6315	73984
8	4	16718	15000	10418	5072	24649	6603	78461
9	5	12556	15000	8896	4913	22989	6749	71103
10	6	12264	15000	8772	4862	24613	6064	71575
11	7	13334	15000	7992	5432	23477	6784	72018
12	8	14065	15000	11788	5844	21767	6871	75335
13	9	10142	15000	11627	4856	21631	5016	68273
14	10	11702	15000	8958	6120	24260	5938	71978
15	11	13605	15000	7927	5077	21963	6365	69937
16	12	11616	15000	9364	5752	22692	6631	71055
17	13	16975	15000	8723	5093	24698	5375	75864
18	14	14735	15000	7795	4924	22490	6663	71607
19	15	15739	15000	8269	5747	23757	5536	74048
20	16	13412	15000	9565	5429	24805	6920	75132
21	17	16071	15000	11287	4805	20764	6534	74461
22	18	17709	15000	11421	4929	24582	5289	78929
23	19	19772	15000	7788	5551	22825	5923	76859
24	20	15225	15000	8938	4928	20268	6160	70518
25	21	18764	15000	8796	5005	23336	6764	77665
26	22	14226	15000	10097	5170	22963	6600	74057
27	23	13447	15000	8524	5123	23185	6784	72063
28	24	19162	15000	7901	5791	21550	5479	74882
29	25	16605	15000	7835	5266	23310	5526	73542
30	MEDIE	14756	15000	9159	5249	22875	6210	73249
31							VAL. PROBABILE =	73285
32							ASIMMETRIA =	0,22
33							CURTOSI =	2,38
34							RANGE =	22900
35							MEDIA =	73750
36							σ =	9349
37							ε =	3688
38							N =	25

Appunti | Carattere | Allineamento | Numeri

H33 | fx =CURTOSI(H2:H30)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	UNITA'	A	B	C	D	E	F	TOTALE
2	Minimi:	10000	15000	7500	4800	20000	5000	62300
3	Massimi:	20000	15000	12000	6200	25000	7000	85200
4	Iterazioni							
5	1	12555	15000	10119	5462	21414	5812	70362
6	2	11392	15000	8631	4980	20980	6538	67521
7	3	17110	15000	7551	5093	22915	6315	73984
8	4	16718	15000	10418	5072	24649	6603	78461
9	5	12556	15000	8896	4913	22989	6749	71103
10	6	12264	15000	8772	4862	24613	6064	71575
11	7	13334	15000	7992	5432	23477	6784	72018
12	8	14065	15000	11788	5844	21767	6871	75335
13	9	10142	15000	11627	4856	21631	5016	68273
14	10	11702	15000	8958	6120	24260	5938	71978
15	11	13605	15000	7927	5077	21963	6365	69937
16	12	11616	15000	9364	5752	22692	6631	71055
17	13	16975	15000	8723	5093	24698	5375	75864
18	14	14735	15000	7795	4924	22490	6663	71607
19	15	15739	15000	8269	5747	23757	5536	74048
20	16	13412	15000	9565	5429	24805	6920	75132
21	17	16071	15000	11287	4805	20764	6534	74461
22	18	17709	15000	11421	4929	24582	5289	78929
23	19	19772	15000	7788	5551	22825	5923	76859
24	20	15225	15000	8938	4928	20268	6160	70518
25	21	18764	15000	8796	5005	23336	6764	77665
26	22	14226	15000	10097	5170	22963	6600	74057
27	23	13447	15000	8524	5123	23185	6784	72063
28	24	19162	15000	7901	5791	21550	5479	74882
29	25	16605	15000	7835	5266	23310	5526	73542
30	MEDIE	14756	15000	9159	5249	22875	6210	73249
31							VAL. PROBABILE =	73285
32							ASIMMETRIA =	0,22
33							CURTOSI =	2,38
34							RANGE =	22900
35							MEDIA =	73750
36							σ =	9349
37							ε =	3688
38							N =	25

Vantaggi e svantaggi dell'AMC

Questa metodologia di simulazione ha alcuni pregi notevoli:

1) è facile da implementare direttamente su calcolatore utilizzando opportuni software;
2) permette di simulare andamenti storici casuali, indipendentemente dalla natura del modello;
3) permette di comprendere meglio i possibili risultati in base alle caratteristiche base di un qualsiasi strumento di gestione economica;
4) toglie l'effetto cosiddetto "*ad hoc*" quando si fanno dei **back test**.

Per contro le simulazioni **Monte Carlo** non tengono conto di alcuni effetti che in realtà esistono e ne determinano le caratteristiche strutturali:

1) Gli svantaggi principali sono dovuti al fatto che i generatori di numeri non sono puramente casuali (*pseudo-random*, generati da opportuni algoritmi, tipo quelli di **Marsiglia**). Significando, con ciò, che la distribuzione di una sequenza generata, non sarà perfettamente uniforme.

2) Un altro problema è legato alla ***non ripetibilità della simulazione***. La sequenza di numeri casuali generata, infatti, proprio per la casualità del generatore, dovrebbe essere non ripetibile.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[**1**] S. M. Ross (2004): "*Probabilità e statistica*", II Edizione, Ed. Maggioli, Rimini;

[**2**] A. A. Arens, R. J. Elder, M. S. Beasley e G. Rusticali (2006): "*Auditing e servizi di assurance. Un approccio integrato*", Ed. Pearson Education, Milano;

[**3**] F. Borrazzo e P. Perchinunno (2007): "*Analisi statistiche con Excel*", Ed. Pearson Education, Milano;

[**4**] D. Morale (2010): "*Introduzione all'utilizzo di Excel per la statistica*", Dispensa, Dipartimento di Matematica, Ed. Università degli Studi, Milano;

[**5**] A. Rotondi, P. Pedroni e A. Pievatolo (2012): "*Probabilità, statistica e simulazione*", III, Edizione, Ed. Springer-Verleg, Milano;