

Si devono, quindi, determinare i valori delle variabili x_1, x_2, \dots, x_n , cioè i livelli di produzione di ciascun settore, in modo che per ogni settore la quantità, complessivamente prodotta, riesca a soddisfare la domanda finale (sia ad uso interno che esterno). Il sistema può scriversi, in forma matriciale compatta, come:

$$(I - A) \cdot x = d$$

ossia, nella forma estesa, come:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$$

dove:

I è la matrice unitaria;

A è la matrice dei coefficienti tecnici di produzione;

x è il vettore colonna delle quantità prodotte dai settori;

d è il vettore dei consumi finali (termini noti).

La condizione $|I - A| \neq 0$, assicura che il sistema ottenuto sia matematicamente possibile e garantisce l'unicità della soluzione. In questa situazione, infatti, la matrice $(I - A)$ risulta invertibile [esiste, cioè, la matrice inversa: $(I - A)^{-1}$; detta matrice di Leontief]. Per la soluzione del sistema i coefficienti delle incognite e le soluzioni (cd *zeri*) devono essere non negativi ($a_{ij} \geq 0$ e $x_i \geq 0$), in quanto rappresentano livelli di produzione in termini fisici ovvero i loro corrispondenti valori nell'unità considerata. La soluzione del sistema può scriversi, allora, in forma compatta, come:

$$x = (I - A)^{-1} \cdot d$$

questa forma di risoluzione permette di determinare le soluzioni al variare del vettore d della domanda finale, in relazione a varie programmazioni economiche, evitando di risolvere ogni volta il sistema.

La matrice inversa di Leontief, consente il calcolo dei moltiplicatori settoriali: sommando i valori per colonna, si ottiene l'incremento di produzione determinato da un incremento unitario della domanda finale per il settore economico, intestatario della colonna.

Il modello I/O Ambientale di Leontief è utile come strumento di previsione:

- ipotizzando la previsione dei consumi futuri e disponendo della matrice dei coefficienti tecnici, la soluzione del sistema permette di formulare una previsione delle quantità da produrre in ciascun settore;
- al variare della domanda da parte degli utilizzatori finali, il modello permette di analizzare quali mutamenti si verificano nei diversi settori produttivi.

Un esempio pratico di I/O ambientale nell'industria del trattamento dei reflui

Consideriamo il sistema economico di una attività industriale, composta da più settori produttivi. Ciascun settore chiede pro-

dotti ad altri settori per generare il suo prodotto (cd *domanda intermedia*). Naturalmente in ultima istanza, la produzione è finalizzata a soddisfare una domanda esterna ovvero interna al sistema produttivo (domanda finale). Il problema è: quale livello di produzione è necessario per soddisfare ambedue le domande? Facciamo, quindi, un esempio con due soli settori (nella fattispecie non occorre conoscerne i prezzi). Consideriamo un sistema industriale di un impianto di depurazione delle acque reflue urbane, della potenzialità di 10.000 AE (*Abitanti Equivalenti*), limitandoci alla sola linea fanghi ossia a solo due settori (produzione di biogas e produzione di energia), secondo l'utilità della summenzionata industria (**Figura 1**).

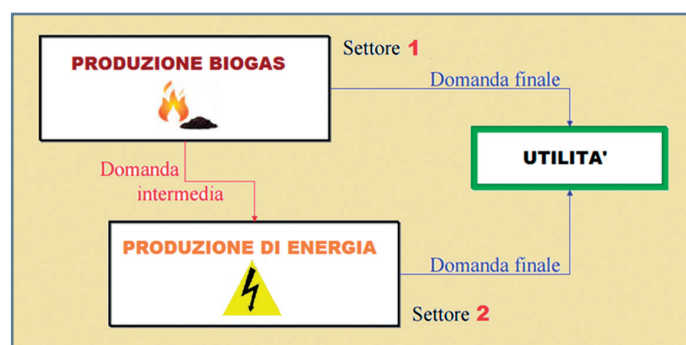


Figura 1 – Domanda intermedia vs Domanda finale.

Questi due settori dipendono l'uno dall'altro. Calcoliamo, quindi, i *coefficienti tecnici di produzione*. Il primo lo otteniamo tramite un bilancio giornaliero di massa.

La produzione specifica di biogas, del fango, è 0,40 m³ biogas/kg TVS alimentati. All'interno di un digestore anaerobico per ogni 1.000 kg di questo substrato inserito (equivalente ad 1,00 m³ di fango alimentato, essendo pari a circa 1.000 kg/m³ il suo peso specifico), avente 4% TS ed un rapporto TVS/TS di 0,75, si calcola che (mod. F. Cecchi, 2010):

$$1.000 \text{ kg substrato} \cdot 0,04 = 40 \text{ kg TS}$$

$$40 \text{ kg TS} \cdot 0,75 = 30 \text{ kg TVS}$$

$$30 \text{ kg TVS} \cdot 0,40 \text{ m}^3 \text{ biogas/kg TVS alimentati} = 12 \text{ m}^3 \text{ biogas (59,90\% CH}_4; 39,90 \text{ CO}_2; 0,20\% \text{ H}_2\text{S)}.$$

Per produrre un 1,00 m³ cubo di biogas, occorrono **0,083** m³ di fango (1/12), al 4% TS.

Stimando un potere calorifero inferiore di 5.500 kcal/m³ di biogas, la potenzialità energetica giornaliera, può essere stimata come segue (APAT, 2005):

$$5.500 \text{ kcal/m}^3 \cdot 12 \text{ m}^3/\text{d biogas} = 66.000 \text{ kcal/d}$$

ossia, equivalentemente:

$$66.000 \text{ kcal/d} \cdot 0,001163 \text{ kW} \cdot \text{d/kcal} = 76,758 \text{ kW}$$

Per l'agitazione del fango e per il suo riscaldamento, all'interno del digestore aerobico, occorrono, rispettivamente:

0,006 kW/m³ di fango (energia elettrica occorrente per l'agitazione meccanica)

$1 \text{ m}^3 \text{ fango/d} \cdot 5,50 \text{ kcal}/(\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}) \cdot (35 - 15) ^\circ\text{C} = 110 \text{ kcal}/(\text{m}^3 \cdot \text{d})$
(energia termica spesa per il riscaldamento).

ossia: $110 \text{ kcal}/(\text{m}^3 \cdot \text{d}) \cdot 0,001163 \text{ kW} \cdot \text{d}/\text{kcal} = \mathbf{0,1280 \text{ kW}/\text{m}^3}$

ove:

$C_s = 5,50 \text{ kcal}/\text{m}^3$ è il calore specifico del biogas;

$\Delta T = (35 - 15) ^\circ\text{C} = 20 ^\circ\text{C}$ è la differenza di temperatura tra il fango nel digestore anaerobico ed il fango, in esso, entrante.

1. Per la produzione di un metro cubo di biogas, dunque, occorrono:

$(0,1280 + 0,006) \cdot 0,0833 = \mathbf{0,0112 \text{ kW}/\text{m}^3}$ (Coefficiente tecnico di produzione del Settore 1);

2. Per la produzione di un chilowatt di energia, al netto della dispersione termica (5% del totale), occorrono:

$1/[72,758 \cdot (1 - 0,05)] = \mathbf{0,0137 \text{ m}^3}$ di biogas (Coefficiente tecnico di produzione del Settore 2);

Chiameremo questi due termini, di flusso interni ai due Settori, "domanda intermedia" generata dal Settore 1 (produzione biogas) e dal Settore 2 (produzione energia). Sia, quindi, *y* la produzione totale (incognita) di biogas da digestione anaerobica e *z* quella di energia, sviluppata da tale fluido, sapendo che la produzione totale deve soddisfare, altresì, le "domande finali" di 625 m³/d di fango (*f. prodotto dall'impianto di trattamento delle acque reflue urbane, di potenzialità pari a 10.000 AE, con produzione specifica di fango, al 4% in secco, pari 0,0625 m³/AE; portata idrica specifica di 0,200 m³/AE e consumo energetico specifico medio giornaliero, sulla linea acque, di 11,47 kW · d/m³ · d; Tab. 1) ovvero 7.500 m³ di biogas e di [10.000 AE · 0,200 m³/(AE · d) · 11,47 kW · d/m³ =] 22.940 kW di energia (M. Campanelli et al., 2013; G. De Feo et al., 2013).*

SEZIONE (Unità di trattamento)	CONSUMO ELETTRICO SPECIFICO (kWh/m ³ _{refluo})
Sollevamento iniziale	0,037
Grigliatura a barre	0,00005
Dissabbiatura (o Disoleatura) aerata	0,004
Sedimentazione primaria	0,004
Aerazione fanghi attivi (rimozione C, N e P)	0,230
Pompaggio fanghi di ricircolo	0,004
Sedimentazione secondaria	0,015
Mixer in pozzetto dosaggio reagenti	0,022
Mixer fanghi attivi denitrificazione ⁽¹⁾	0,060
Pompa alimentazione filtrazione	0,010
Filtrazione terziaria	0,001
Clorazione	0,001
Ispezzimento gravimetrico fanghi	0,053

Disidratazione fanghi con nastropressa	0,037
TOTALE	0,0478
(1) - IRSA, 1982	

Tabella 1 - Consumo elettrico specifico, nelle varie unità di trattamento (EPRI, 2002).

Le equazioni complete del sistema, pertanto, saranno (E. Dietzenbacher et al., 2004):

$$y = 0 + 0,0112 \cdot z + 7.500$$

$$z = 0,0137 \cdot y + 0 + 22.940$$

Riportando tutto il sistema del *Modello I/O Ambientale*, sottoforma *matriciale e vettoriale (Tabella 2)*:

A		(I - A)	
0	0,0112	1	-0,0112
0,0137	0	-0,0137	1
		Det (I - A) =	0,999847
I		(I - A) ⁻¹	
1	0	1,000153	0,011202
0	1	0,013702	1,000153
d		(I - A) ⁻¹ · d	
7.500		7.758,118	
22.940		23.046,29	

Tabella 2 - Sviluppo matriciale in Excel (D.M. Bourg, 2006).

Per soddisfare una domanda finale di **7.500 m³** di biogas e **20.000 kW** di energia, è necessario produrre, in totale, **7.758 m³** di biogas e **23.046 kW** di energia (**Figura 2**).

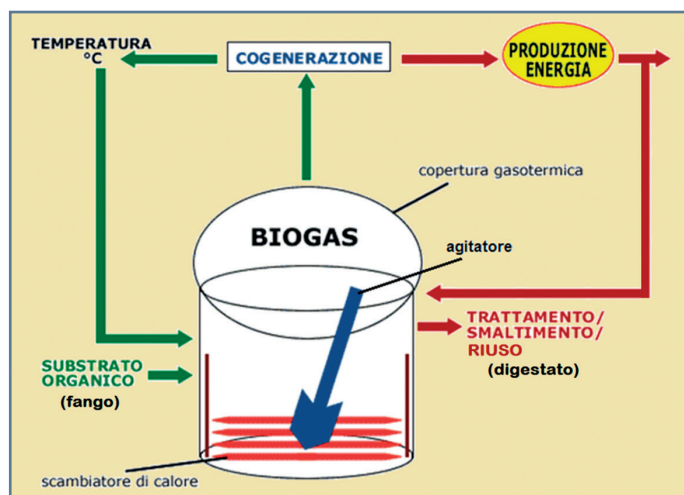


Figura 2 - Flussi IN/OUT (S1. Biogas ed S2. Energia) digestore anaerobico.

Bibliografia

- [1]** APAT (2005): "Digestione anaerobica della frazione organica dei rifiuti solidi", *Manuali e linee guida*, Ed. APAT, Roma;
- [2]** G. Pireddu (2002): "Economia dell'ambiente", Ed. Apogeo, Milano;
- [3]** R.U. Ayres e A.V. Kneese (1969): "Production, Consumption, and Externalities", *The American Economic Review*, Ed. AER, Pittsburgh;
- [4]** F. Cecchi (2010): "La digestione anaerobica – Descrizione del processo e bilancio di massa"; *Dispensa del Corso di Laboratorio Fondamenti di Processi e Impianti biotecnologici*, Dip. Biotecnologie, Ed. Università degli Studi, Verona;
- [5]** W. Leontief (1970): "Environmental repercussions and economics structure: an Input-Output approach", *The Review of Economics and Statistics*; Ed. MIT Press, Cambridge; Ed. Ital. "Relazioni fra le strutture economiche e loro effetti sull'ambiente secondo l'analisi Input-Output", in G. Cannata (1974), a cura di, *Saggi di Economia dell'Ambiente*, Ed. Giuffrè, Milano.
- [6]** M. Cardin, P. Ferretti e S. Funari (2008): "Introduzione soft alla matematica per l'economia e la finanza: I sistemi lineari"; *Quaderno di didattica n. 25*; Ed. Ca' Foscari, Venezia;
- [7]** M. Campanelli, P. Foladori e M. Vaccari (2013): "Consumi elettrici ed efficienza energetica nel trattamento delle acque reflue"; a cura di, *Ambiente & Territorio*, Ed. Maggioli, Santarcangelo di Romagna;
- [8]** J.G. Brida e N. Colletti (2008): "Manuale di matematica per le applicazioni economiche – Algebra lineare a due variabili", Vol. II, Ed. Bolzano University Press, Bolzano;
- [9]** G. De Feo, S. De Gisi e M. Galasso (2013): "Fanghi di depurazione – Produzione, caratterizzazione e trattamento", Ed. Dario Flaccovio, Palermo;
- [10]** E. Dietzenbacher e M.L. Lahr (2004): "Wassily Leontief and Input-Output economics", a cura di, Ed. Cambridge University Press, Cambridge;
- [11]** D.M. Bourg (2006): "Excel per i calcoli scientifici e per ingegneri", Ed. Tecniche Nuove, Milano;
- [12]** EPRI (2002): "Water and Sustainability: U.S. Electricity Consumption for Water Supply & Treatment", *The Next Half Century*, Ed. EPRI, Palo Alto;
- [13]** M.C. Annesini, M. Beccari, A.C. Pinto, A.R. Giona, F. Gironi, G. Mininni (1982): "Consumi di energia negli impianti di depurazione delle acque di scarico", *Quaderno n. 58*, Ed. IRSA-CNR, Roma.