

MOTO VARIO LINEARE SU UNA SUPERFICIE SCOLANTE PIANA

(Luigi Fanizzi – ECOACQUE®)

1. PREMESSA

Una rete di drenaggio, collocata in un'area bacinale, di un agglomerato urbano, sul quale insiste un evento meteorico, nel modello matematico dell'onda cinematica, descritto nel presente studio, viene concettualizzata come una serie di livelli (Figura 1), contenenti oggetti (visibili e non visibili), che compongono detto sistema di drenaggio. Questi ultimi possono distinguersi in: piano degli eventi atmosferici; piano bacinale di ricezione degli afflussi e piano reticolare d'idrotrasporto dei deflussi.

- Nel piano degli eventi atmosferici, vengono definiti i valori della curva di possibilità pluviometrica (a, n) che insistono sul piano bacinale di ricezione. Gli eventi meteorici, sono rappresentativi e ragguagliati alla stazione pluviometrica locale, cui fa riferimento una serie temporale di dati, funzionalizzata per un certo periodo di ritorno idrologico (T_r).
- Il piano bacinale di ricezione degli afflussi, viene definito tramite l'introduzione di una porzione di superficie territoriale ($b, \text{scolante}$), ben caratterizzata nelle sue parti, permeabile ed impermeabile, che riceve gli afflussi, come precipitazione piovosa, dal piano degli eventi meteorici. Questi, poi, saranno canalizzati e convogliati, al corpo ricettore finale ed in parte invasati nel piano reticolare d'idrotrasporto superficiale (piccoli invasi).
- Il piano reticolare d'idrotrasporto dei deflussi, infine, contiene la rete di canali, collettori e vasche di stoccaggio che trasportano le acque di deflusso verso i manufatti preposti al trattamento appropriato per essere immesso nel corpo ricettore finale (rete fognaria o fogna separata, acque superficiali e marine, suolo o sottosuolo anidro).

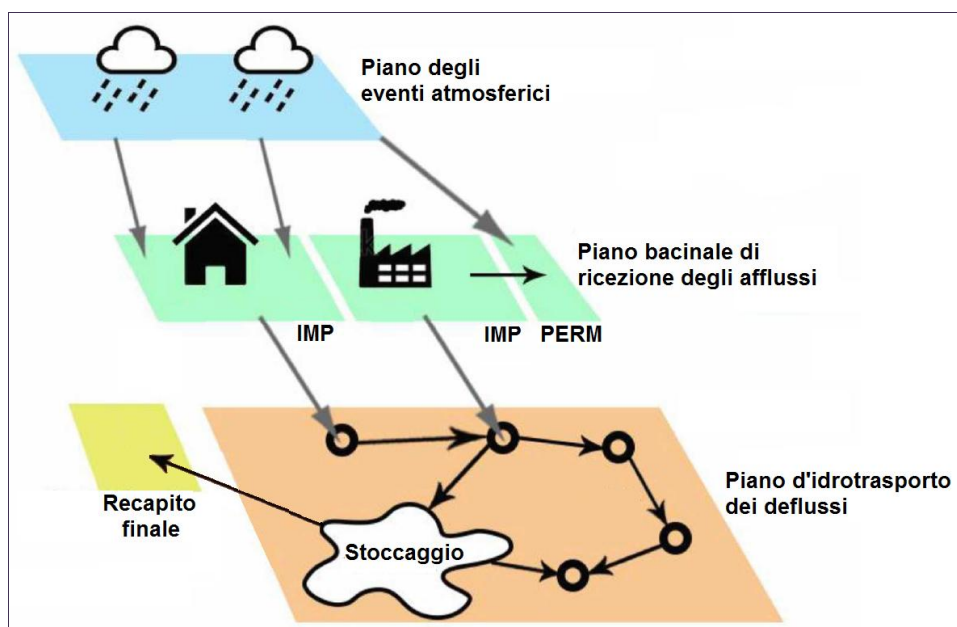


Fig. 1 – Livelli del modello matematico "Onda Cinematica".

2. LA TEORIA DELL'ONDA CINEMATICA DI WOODING

Si consideri una superficie piana (Figura 2), di lunghezza L_0 (larghezza equivalente $B \leq L_0$) e pendenza s_0 ; siano inoltre $U(x, t)$ la velocità media di portata, $h(x, t)$ il tirante idrico, $q(x, t)$ la portata defluente per unità di ampiezza, tutti variabili sia con l'ascissa x sia con il tempo t , e $p(t)$ l'intensità di pioggia netta (ipotizzata costante: *ietogramma rettangolare*). Il fenomeno è retto dall'accoppiamento della equazione di continuità e della equazione del moto, che compongono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, di tipo iperbolico, noto come *equazioni di De Saint Venant*.

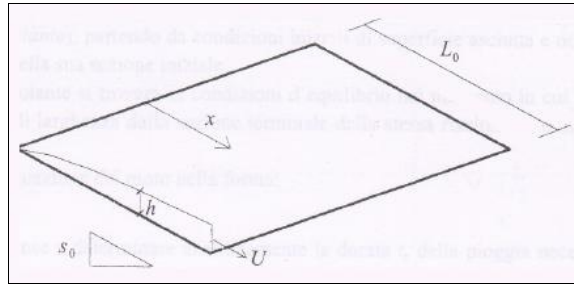


Fig. 2 – Schema di superficie scolante piana.

Questo sistema di equazioni potrà essere integrato di volta in volta (generalmente per via numerica) basandosi su assegnate condizioni al contorno. La soluzione del sistema di equazioni completo risulta significativamente dipendente dal valore assunto dal parametro K_w definito come:

$$k_w = \frac{s_0 \cdot L_0}{H_0 \cdot F_0^2}$$

dove H_0 è il tirante idrico (in m) per $x = L_0$ corrispondente ad una portata specifica $q_0 = p \cdot L_0$, F_0 è il numero di Froude della corrente stessa e s_0 e L_0 sono espressi rispettivamente in [m/m] e in [m]. Il parametro K_w , verosimilmente rappresenta il rapporto fra la perdita di energia potenziale subita dalla corrente lungo la superficie scolante e l'energia posseduta dalla stessa all'estremità di valle della superficie scolante. È possibile dimostrare [D. A. Woolhiser, 1977] che per valori di K_w , che tendano all'infinito, si giunge all'approssimazione del problema nota come "onda cinematica" nella quale l'equazione del moto completa del sistema di equazioni di De Saint Venant viene sostituita dalla più semplice condizione di moto uniforme. In bibliografia esistono chiare indicazioni [D. A. Woolhiser, 1977] in base alle quali per valori di K_w sufficientemente grandi, quali è lecito aspettarsi nelle applicazioni relative allo scorrimento su superfici stradali, l'approssimazione cinematica comporta scarti trascurabili rispetto alla soluzione delle equazioni complete. Wooding [Wooding, 1965] ha fornito la soluzione esatta delle equazioni dell'onda cinematica, per una superficie scolante interessata da pioggia netta d'intensità, costante nel tempo e nello spazio (p costante), partendo da condizioni iniziali di superficie asciutta e non interessata da immissioni nella sua sezione iniziale. La superficie scolante si troverà in condizioni d'equilibrio nel momento in cui la portata defluente per unità di larghezza dalla sezione terminale della stessa risulterà pari alla portata in ingresso ($p \cdot L_0$). Esprimendo l'equazione del moto nella forma:

$$U = \alpha \cdot h^{m-1}$$

Wooding [1965] giunse a determinare analiticamente la durata t_e della pioggia necessaria affinché si verifichi la condizione d'equilibrio, fornendo la seguente espressione:

$$t_e = \left(\frac{L_0}{\alpha \cdot p^{m-1}} \right)^{\frac{1}{m}}$$

con p espresso in [m/s] e l'ascissa corrente $x = L_0$ in [m].

Risultando, in condizioni di equilibrio, per $p = L_0$, un'altezza idrica corrispondente a:

$$h_e = p \cdot t_e$$

mentre per una generica ascissa x , sempre in condizioni di equilibrio, si avrà:

$$h = \left(\frac{p \cdot x}{\alpha} \right)$$

È opportuno in tale contesto fornire maggiori dettagli sul valore da attribuire ai parametri m ed α ricorrenti nelle summenzionate equazioni.

Nel caso in cui si ipotizzi che il deflusso avvenga in condizioni di regime laminare, per i valori di m ed α si dovrà porre, nel caso si ipotizzi che il deflusso avvenga in condizioni di regime laminare ovvero turbolento, rispettivamente, con l'ovvio significato dei simboli:

$$m = 3 ; \alpha = \frac{8 \cdot g \cdot s_0}{k_\lambda \cdot \nu} \text{ [Regime laminare]} \quad m = \frac{5}{3} \div 2 ; \alpha = k_s \cdot s_0^{\frac{1}{2}} \text{ [Regime turbolento]}$$

essendo ν la viscosità cinematica dell'acqua (il cui valore si può ritenere costante e pari, a 15 °C a circa $1,1094 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$), $g = 9,80665 \text{ [m/s]}$ la gravità terrestre e K_λ un parametro (che per deflusso in moto laminare su superficie liscia sarebbe pari a **24**) il cui valore è fornito dalla seguente espressione:

$$k_\lambda = k_0 + A \cdot p^b$$

nella quale K_0 rende conto della scabrezza della superficie (Tabella 1) mentre il secondo termine del secondo membro rende conto di una scabrezza aggiuntiva conseguente all'impatto delle gocce di pioggia sul pelo libero; taluni Autori definiscono tale condizione di deflusso come "regime laminare disturbato". Se l'afflusso netto p , nel caso particolare, è espresso in [m/h] per ora, si può assumere che i parametri A e b risultino pari, rispettivamente, a **4** e **1**. Cioè una superficie piana, in cemento, lunga $L_0 = 20 \text{ [m]}$, con pendenza pari a $s_0 = 0,001 \text{ [m/m]}$ e coefficiente di Strickler K_s pari a $70 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, per una pioggia netta di $p = 0,10 \text{ [m/h]}$ sarà caratterizzata da un $K_\lambda = 24 + 4 \cdot 0,10 \cong 24,40$.

SUPERFICIE	MOTO LAMINARE k_0	MOTO TURBOLENTO $k_s \text{ [m}^{1/3}/\text{s]}$
Cemento o asfalto	24 ÷ 108	70 ÷ 100
Sabbia	30 ÷ 120	60 ÷ 100
Ghiaia	90 ÷ 400	30 ÷ 80
Argilla o Limo	100 ÷ 500	30 ÷ 80
Vegetazione sparsa	1.000 ÷ 4.000	20 ÷ 70
Prato con erba bassa	3.000 ÷ 10.000	5 ÷ 10
Terreno incolto	7.000 ÷ 40.000	2 ÷ 5

Tab. 1 – Parametri di resistenza per deflusso superficiale (D. A. Woolhiser, 1977).

Per contro, qualora si faccia riferimento al regime di moto turbolento, la formula precedente può essere esplicitata attraverso la ben nota formula di P.G. Gauckler-A. Strickler (1868):

$$U = K_s \cdot R^{2/3} \cdot s_0^{1/2}$$

per cui, assumendo il raggio idraulico R pari al tirante idrico h (in virtù del piccolo spessore della lama d'acqua defluente, se rapportato alla larghezza della superficie scolante), nella formula risulterà:

$$m = 5/3 \quad \alpha = K_s \cdot s_0^{1/2}$$

in cui i valori di K_s sono desumibili dalla Tabella 1.

Nella letteratura è possibile trovare anche cenni a formulazioni scaturite da investigazioni sperimentali nelle quali si è constatato che in talune condizioni non è possibile ipotizzare che il regime di moto sia univocamente definito [R. A. Wooding, 1965], per cui, allo scopo di meglio interpretare i risultati sperimentali, nella precedente formula viene consigliato: $m = 2$; valore che non ha alcun fondamento teorico, ma che funge appunto da parametro di taratura per la modellazione del deflusso su superfici piane; per i valori da attribuire ad α , invece, qualora non esistano diverse indicazioni, si può fare riferimento alla formula precedente ed ai valori di K_s forniti sempre dalla Tabella 1.

3. LA DETERMINAZIONE DELLA PIOGGIA CRITICA PER LA SUPERFICIE SCOLANTE

In base alla teoria dell'onda cinematica, è possibile dedurre la condizione di massimo deflusso da una superficie piana interessata da un pluviogramma netto di tipo rettangolare (intensità di pioggia costante); infatti tale condizione si verificherà allorché si verifichi l'uguaglianza:

$$t_{pc} = t_e$$

t_{pc} , la durata della pioggia critica,
 t_e , il tempo d'equilibrio della superficie scolante.

Assumendo inoltre, che il valore della pioggia netta sia desumibile da una equazione di tipo monomio: $h = a \cdot t^n$, mediante la precedente relazione:

$$t_{pc} = \left(\frac{L_0}{\alpha \cdot a^{m-1}} \right)^{\frac{1}{n \cdot (m-1) + 1}}$$

Conseguentemente, è possibile determinare sia il valore della massima portata defluente dalla falda piana, larga B [m], secondo la relazione:

$$Q_{max} = a \cdot t_{pc}^{n-1} \cdot L_0 \cdot B$$

sia il valore del massimo tirante idrico, che si avrà in corrispondenza dello sbocco, tenendo

$$h_{max} = a \cdot t_{pc}^{n-1} \cdot t_e = a \cdot t_{pc}^n$$

In chiusura di paragrafo è opportuno effettuare due considerazioni che possono essere di ausilio al progettista per un utilizzo critico dalle formulazioni sopra riportate:

1) i valori dei tempi critici di pioggia cui si perviene per superfici di modesta estensione sono generalmente piccoli, in misura tale da fare ritenere che le curve di probabilità pluviometrica, normalmente adottate, non siano estrapolabili per durate di pioggia così brevi; per tale motivo i valori di a ed n che compaiono nelle relazioni, qualora non esistano misure sistematiche delle altezze di pioggia per durate brevissime, vanno scelti con oculatezza;

2) tutta la trattazione sopra esposta si fonda sull'ipotesi che il deflusso sulla superficie scolante avvenga in condizioni di moto piano, ovvero che il velo idrico sia costante su tutta la sua larghezza, mentre in realtà, poiché l'altezza del velo idrico è in genere paragonabile alle dimensioni della scabrezza superficiale, si può avere un notevole scostamento tra le condizioni di deflusso superficiale effettive e quelle assunte nella trattazione teorica.

N.B. È opportuno ricordare che, per l'applicazione delle formule in precedenza riportate, è indispensabile che i valori da attribuire alle singole variabili siano rigorosamente dimensionali; ad esempio, poiché, salvo indicazioni contrarie, i tempi si intendono espressi in secondi, particolare attenzione va posta per il valore da attribuire ad a nelle formule, che dovrà essere espresso in [m/s], essendo n l'esponente della legge di pioggia.

4. ESEMPIO DI CALCOLO

Si voglia calcolare la massima portata defluente da una superficie scolante piana ($S = 10.000 \text{ m}^2$), ubicata in un agglomerato urbano ad alta densità abitativa, avente una larghezza equivalente $B = 91,25$ [m] ($B < L_0$), una lunghezza di ruscellamento $L_0 = 109,59$ [m] ed una pendenza media $s_0 = 0,03$ [m/m]; le caratteristiche di scabrezza della superficie siano tali da poter fare assumere $k_s = 70 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$.

La larghezza equivalente del bacino scolante (B), viene stimata come il rapporto tra l'area totale dello stesso (S) e la lunghezza di ruscellamento (L₀) ove quest'ultima è intesa come la massima lunghezza di deflusso superficiale del bacino drenato (V. Mokus, 1961; USDA, 1973):

$$B = \frac{S}{L_0} = \frac{S}{0,4364 \cdot S^{0,60}} = 91,25 \text{ [m]}$$

Sia stata calcolata la curva di possibilità pluviometrica, per la stazione pluviometrica di Bari Osservatorio (già ragguagliata all'area in oggetto; U. Puppini, 1931), per un tempo di ritorno idrologico di 5 anni, espressa dalla seguente equazione monomia:

$$h = 33,50 \cdot t^{0,50}$$

in cui **h** è espresso in [mm] e **t** in [h]. Ai fini del calcolo della pioggia netta, un approccio corretto, nel modello afflussi-deflussi, consiste nel far dipendere la stima del coefficiente d'afflusso dal tempo di ritorno di progetto e nel valutarlo, separatamente, per le aree impermeabili ϕ_{IMP} e per quelle permeabili ϕ_{PERM} , in modo che venga rispettata la condizione (S. Mambretti, A. Paoletti, 1996):

$$\phi = \phi_{IMP} \cdot IMP + \phi_{PERM} \cdot (1 - IMP) \leq 1 \text{ [n. p.]}$$

dove **IMP** è il cosiddetto *coefficiente di impermeabilità*, rapporto tra **aree impermeabili** ed **area totale del bacino**. In progetto, in funzione del tempo di ritorno (**T_r**) si sono considerati, rispettivamente:

TIPOLOGIA URBANA (USO DEL SUOLO)	COEFFICIENTE DI IMPERMEABILITÀ IMP
Commerciale (periferia/centro)	0,60 ÷ 0,80
Industriale (periferia/centro)	0,55 ÷ 0,85
Residenziale (costruzioni dense: periferia/centro)	0,70 ÷ 0,90
Residenziale (costruzioni spaziate: periferia/centro)	0,40 ÷ 0,60
Zone a villini od a verde attrezzato (periferia/centro)	0,20 ÷ 0,40
Aree non urbanizzate (periferia/centro)	0,05 ÷ 0,30

T _r (anni)	ϕ_{PERM}	ϕ_{IMP}
< 2	0,00 ÷ 0,15	0,60 ÷ 0,75
2 ÷ 10	0,10 ÷ 0,25	0,65 ÷ 0,80
10 ÷ 20	0,15 ÷ 0,30	0,70 ÷ 0,90
> 20*	0,25 ÷ 0,50	0,80 ÷ 0,95

* (S. Mambretti, A. Paoletti, 1996)

Per cui:

$$\phi = 0,80 \cdot 0,80 + 0,25 \cdot (1 - 0,80) = 0,64 + 0,05 \cong 0,70$$

Volendo pertanto esprimere la pioggia netta h in metri e t in secondi, l'equazione precedente dovrà scriversi come:

$$h = (0,70 \cdot 0,0335/3600^{0,50}) \cdot t^{0,50} = 0,00039 \cdot t^{0,50}$$

Considerando che il deflusso sulla superficie scolante avvenga in regime turbolento si avrà:

$$\alpha = ks \cdot s_0^{1/2} = 70 \cdot 0,03^{0,50} = 12,12 \text{ [m}^{1/3}/\text{s]}$$

da cui, in virtù delle considerazioni svolte in precedenza, assumendo **m = 2**, si ottiene il tempo critico di pioggia:

$$t_{pc} = \left(\frac{109,59}{12,12 \cdot 0,00039^{2-1}} \right)^{\frac{1}{0,50 \cdot (2-1) + 1}} = 811,72 \text{ [s]}$$

ed il tirante idrico critico:

$$h_c = 0,00039 \cdot 811,72^{0,50} = \mathbf{0,011} \text{ [m]}$$

quindi, la portata massima, defluente dalla superficie in esame, da canalizzare, risulta pari a:

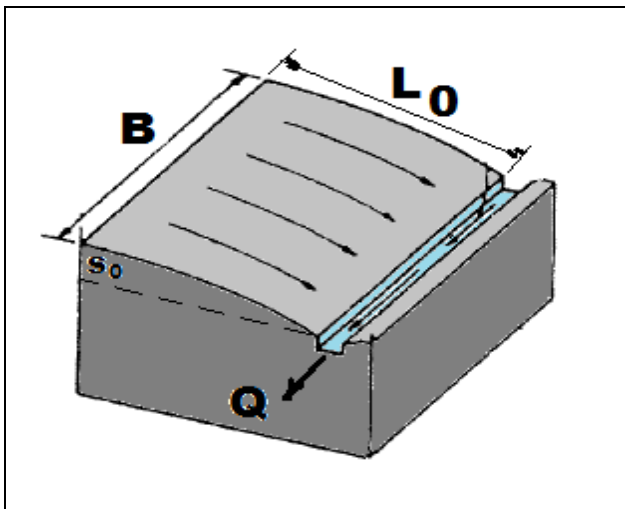
$$Q_{max} = 0,00039 \cdot 811^{0,50-1} \cdot 91,25 \cdot 109,59 = \mathbf{0,13718} \text{ [m}^3\text{/s]}$$

È da rilevare come il valore del coefficiente udometrico, in tale area urbana, sia risultato elevato, in quanto pari a:

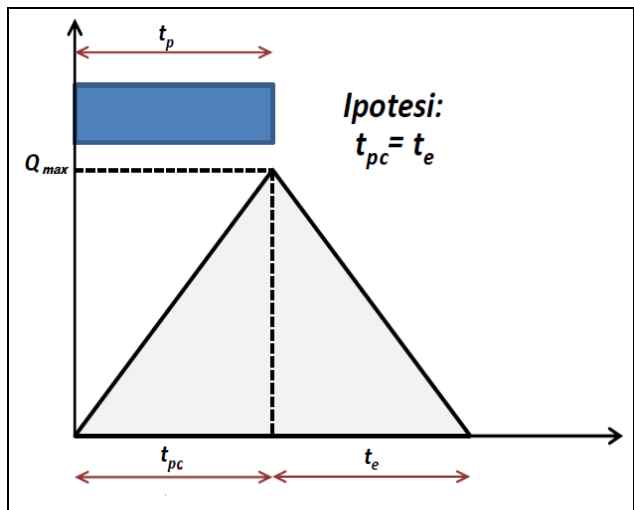
$$u = 1000 \cdot Q_{max}/(L_0 \cdot B) = 137,18/(91,25 \cdot 109,59/10000) = \mathbf{137,18} \text{ [L/(s \cdot ha)]}$$

Esprimendo l'equazione del moto turbolento ($Re = 5.951,33$; con $\rho = 999,1026 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 0,001108 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ a $T = 15 \text{ }^\circ\text{C}$), il valore medio della velocità critica della corrente può essere esplicitato attraverso la ben nota formula di P.G. Gauckler-A. Strickler (1868):

$$U_c = K_s \cdot R^{2/3} \cdot s_0^{1/2} \cong K_s \cdot h_c^{2/3} \cdot s_0^{1/2} = 70 \cdot 0,011^{2/3} \cdot 0,03^{0,50} = \mathbf{0,60} \text{ [m/s]}$$



Schematizzazione della superficie scolante



Idrogramma di piena

Nel caso di condotte a sezione circolare, in CAV, nota la portata (Q) da drenare, fissato il grado di riempimento ($h/D \leq 0,70 \div 0,80$) nonché la pendenza (i) ed il coefficiente di scabrezza (k_s) della tubazione, allora è possibile ottenere la seguente equazione che fornisce il diametro incognito della condotta:

$$D = 1,5483 \cdot \left(\frac{Q}{r_Q \cdot k_s \cdot \sqrt{i}} \right)^{\frac{3}{8}}$$

dove

$h/D = 0,75$ grado di riempimento, prudenzialmente fissato;

Q [$\text{m}^3\text{/s}$] = $0,13718$ portata da convogliare in condotta;

k_s [$\text{m}^{1/3}\text{/s}$] = 80 coefficiente di scabrezza di Strickler;

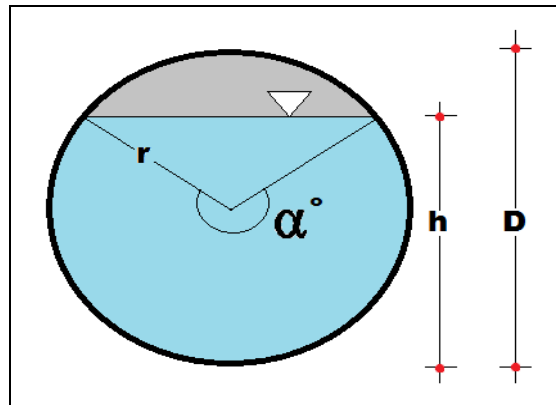
i [m/m] = $0,005$ pendenza della condotta;

r_Q [n. p.] = Q/Q_r (rapporto fra la portata da convogliare Q e quella di massimo riempimento Q_r).

I valori del rapporto r_Q possono essere ricavati dalla seguente funzione omotetica ($R^2 = 0,9996$):

$$r_Q = -2,8483 \cdot \left(\frac{h}{D} \right)^4 + 2,9178 \cdot \left(\frac{h}{D} \right)^3 + 0,6222 \cdot \left(\frac{h}{D} \right)^2 + 0,3471 \cdot \left(\frac{h}{D} \right) - 0,0203$$

L'applicazione delle summezionate formule, adottando i dati assegnati, forniscono i seguenti valori di $r_Q = 0,92$ [n.p.] e $D = 0,40$ [m].



Grado di riempimento ed angolo α sotteso

Per conoscere il valore della velocità media nella condotta, considerando il massimo rapporto ammissibile $h/D = 0,75$, al quale corrisponde un angolo (rad): $\alpha^\circ = 2 \cdot \arccos(1 - 2 \cdot h/D) = 4,1888$, corrisponde la seguente funzione adimensionale (G. Becciu, A. Paoletti, 2013):

$$F_v = \left(\frac{\alpha - \sin \alpha}{2 \cdot \alpha^2} \right) = 0,1440$$

che restituisce il seguente valore della velocità media, raggiunta nella condotta:

$$v = \left(F_v \cdot k_s^3 \cdot Q \cdot i^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{4}} = 1,38 \text{ [m/s]}$$

Tubazione	Strickler k m ^{1/3} · s ⁻¹
Tubi nuovi PE, PVC, PRFV, Rame, Acciaio Inox	130 - 150
Tubi nuovi Gres, Ghisa rivestita, Acciaio	120 - 100
Tubi in Cemento ordinario, tubi con lievi incrostazioni	105 - 85
Tubi con incrostazioni e depositi	80 - 90

Coefficienti di scabrezza per tubazioni in vari materiali e stato d'uso.

BIBLIOGRAFIA

- [1] U. Puppini (1931): "Coefficienti udometrici per canali di bonifica", Riv. Tec. L'Ingegnere, Ed. SNFI, Roma.
- [2] S. Mambretti, A. Paoletti (1996): "A new approach in overland flow simulation in urbancatchments", Proceedings of the Seventh International Conference on Urban Storm Drainage, 9-13/9 Hannover, Germania.
- [3] R.A. Wooding (1965): "A hydraulic model for the catchment-stream problem – 1. Kinematic wave theory", Journal of Hydrology, N. 3, Ed. Elsevier, Amsterdam, Olanda.
- [4] D. A. Woolhiser (1977): "Unsteady Free-surface Flow Problems", Estratto da "Matematical models for surface water Hydrology", Proceedings of th Workshop held at th IBM Scientific Cente, Pisa.
- [5] G. Becciu, A. Paoletti (2013): "Fondamenti di costruzioni idrauliche", UTET, Milano.
- [6] Mockus, V. (1961): "Watershed lag", U.S. Dept. of Agriculture, Soil Conservation Service, ES-1015, Washington, DC.
- [7] U.S. Department of Agriculture, Soil Conservation Service (1973): "A method for estimating volume and rate runoff in small watersheds" Watershed lag", SCS-TP-149, Washington, DC.